Khnisse

A.S :2011/2012

Devoir de contrôle N°3

Durée: 2.h

Exercice N°1: (4 pts)

I/ Pour chacune des affirmations suivantes, **répondre par « VRAI » ou « FAUX » Sans justification.**

La courbe (ζ) représente, dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ une fonction f définie

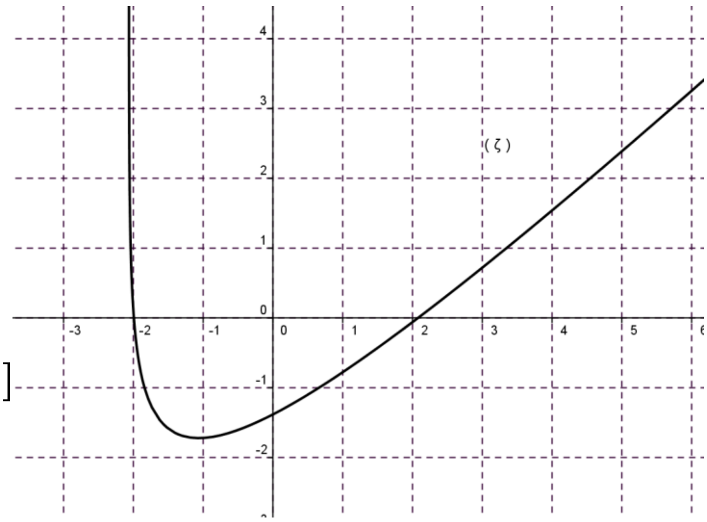
1/ $\int_{-1}^{4} f(x)\,dx < 0$

2/ $4 < \int_{-2}^{2} -f(x)\,dx < 6$

3/ $\int_{1}^{3} f'(x)\,dx \geq 0$

4/ On désigne par $\bar{f}$ la valeur moyenne de f sur $[2,4]$

on a alors : $\frac{1}{2} \leq \bar{f} \leq 1$



II/ Pour chacune des questions suivantes une seule réponse proposée est exacte.

Choisir la réponse exacte sans justification.

1/ Soit C et D deux évènements indépendants tel que $P(C) = \frac{1}{3}$ et $P(D) = \frac{1}{12}$. Alors

a) $P(D \cap C) = \frac{1}{12}$ b) $P(D \cup C) = \frac{5}{12}$ c) $P(D / C) = \frac{1}{12}$

2/ Une urne contient 4 boules blanches et 3 boules rouges toutes indiscernables au toucher.

On tire successivement sans remise 3 boules de l'urne

La probabilité p d'avoir deux boules blanches est :

a) $p = \frac{12}{35}$ b) $p = \frac{6}{35}$ c) $p = \frac{18}{35}$

3/ On considère l'équation différentielle (E) : $y'' = -4y$.

La solution de (E) tel que $y(0) = 1$ et $y'(\frac{\pi}{2}) = -2$ est :

a) $y(x) = \cos(2x) - \sin(2x)$ b) $y(x) = -\cos(2x) + \sin(2x)$ c) $y(x) = \cos(2x) + \sin(2x)$

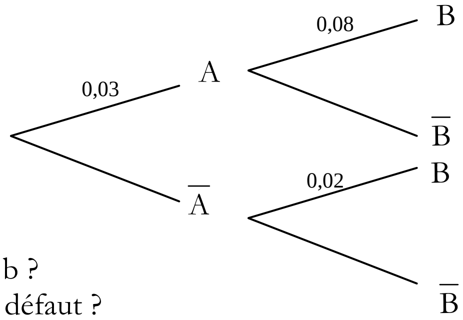
Exercice N°2 : (4 pts)

Une usine fabrique en grande série de climatiseurs susceptibles de présenter deux défauts a et b .
Une étude statistique de la production conduit aux résultats suivants :

- 3% des climatiseurs présentant le défaut a.
- Parmi les climatiseurs présentant le défaut a, 8% présentent le défaut b
- Parmi les climatiseurs ne présentant pas le défaut a, 2% présentent le défaut b

On prélève au hasard un climatiseur dans la production. On désigne par A et B les évènements suivants :
A « Le climatiseur présente le défaut a »
B « Le climatiseur présente le défaut b »

1/ L'arbre pondéré ci-contre représente cette situation.
Recopier et compléter cet arbre.



2/ Pour cette question, on donnera les résultats à 10^{-3} prés

a) Quelle est la probabilité que ce climatiseur présente à la fois les deux défauts a et b ?

b) Quelle est la probabilité que ce climatiseur présente le défaut b ?

c) Quelle est la probabilité que ce climatiseur ne présente aucun défaut ?

d) Sachant que ce climatiseur présente le défaut b, quelle est la probabilité qu'il présente le défaut a ?

Exercice N°3 : (6 pts)

1) Résoudre sur IR l'équation différentielle (E') : y'+y= 0.

2) On considère l'équation différentielle (E) : $y'+y=e^{-x}$.

a/ Soit g la fonction définie sur IR par $g(x)=ax.e^{-x}$ (où a est un réel).

Déterminer le réel a pour que la fonction g soit une solution de l'équation (E).

b/ Montrer que h est solution de (E) si et seulement si (h-g) est solution de (E') : y'+y= 0.

c/ Résoudre alors l'équation différentielle (E)

3) Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=(1+x).e^{-x}$ et soit $V_n=\int_0^n f(x)dx$ où $n\in \mathrm{IN}^*$.

a/ Vérifier que f est la solution de (E) tel que y(0)= 1.

b/ Sans intégration par parties, montrer que pour tout $n\in IN^*$, $V_n=2-(2+n).e^{-n}$.

c/ Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$.

Exercice N°4 : (6 pts)

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$; on considère la suite (I_n) définie par $I_n=\int_1^e (\ln x)^n\,dx$

1/a) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$ et $\forall x\in[1,e]$: $(\ln(x))^n-(\ln(x))^{n+1}\geq 0$

b) En déduire que la suite (I_n) est décroissante.

c) Déduire que la suite (I_n) est convergente

2/a) Calculer I_1

b) Montrer à l'aide d'une intégration que $\forall n\in\mathbb{N}^* : I_{n+1}=e-(n+1)I_n$

c) En déduire la valeur de I_2

3/a) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^* ,(n+1)I_n\leq e$.

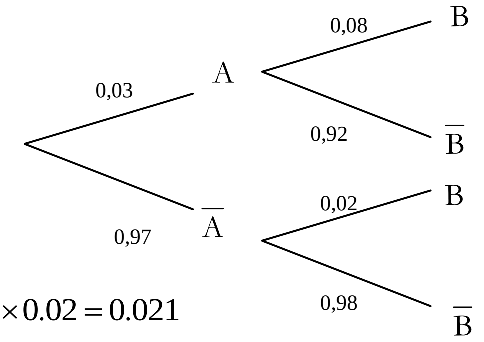
b) Déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

Correction devoir de contrôle N°3 $\quad$ 4ème sc

Exercice N°1: (4 pts)

I/ 1) VRAI ; 2) VRAI ; 3) VRAI ; 4) VRAI $\qquad$ **II/ 1/ c) ; 2/c) ; 3/ c)**

Exercice N°2: (5 pts)



2/a) $P(A\cap B)=P(B/A).P(A)=0.03\times 0.08=0.002$

b) $P(B)=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)=0.03\times 0.08+0.97\times 0.02=0.021$

c) $P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=0.97\times 0.98=0.950$

d) $P\left(A/B\right)=\dfrac{P\left(A\cap B\right)}{P\left(B\right)}=\dfrac{0.002}{0.021}=0.095$

Exercice N°3: (5 pts)

1/ $\left(E'\right): y'+y=0 \Leftrightarrow y'=-y \Leftrightarrow y(x)=ke^{-x}$; $k\in\mathbb{R}$

2/ a) g solution de $\left(E\right) \Leftrightarrow g'(x)+g(x)=e^{-x} \Leftrightarrow a.e^{-x}-ax.e^{-x}+ax.e^{-x}=e^{-x} \Leftrightarrow a.e^{-x}=e^{-x} \Leftrightarrow a=1$

D'où on a $g(x)=xe^{-x}$

b)

$\left(h-g\right)$ solution de $\left(E'\right) \Leftrightarrow \left(h-g\right)'(x)+\left(h-g\right)(x)=0 \Leftrightarrow a.e^{-x}-ax.e^{-x}+ax.e^{-x}=e^{-x}$

$\Leftrightarrow h'(x)-g'(x)+h(x)-g(x)=0 \Leftrightarrow h'(x)+h(x)=g'(x)+g(x) \Leftrightarrow h'(x)+h(x)=e^{-x}$

$\Leftrightarrow$ h solution de $\left(E\right)$

c) h solution de $\left(E\right) \Leftrightarrow \left(h-g\right)$ solution de $\left(E'\right) \Leftrightarrow h(x)-g(x)=e^{-x} \Leftrightarrow h(x)=xe^{-x}+ke^{-x}$; $k\in\mathbb{R}$

3/a)

f solution de $\left(E\right) \Leftrightarrow f(x)=xe^{-x}+ke^{-x}$ or $f(0)=1$

donc $0+ke^{0}=1 \Leftrightarrow k=1$ d'où $f(x)=xe^{-x}+e^{-x}=\left(1+x\right)e^{-x}$

b) f solution de $\left(E\right) \Leftrightarrow f'(x)+f(x)=e^{-x} \Leftrightarrow f(x)=e^{-x}-f'(x)$ donc

$$V_n=\int_0^n f(x)\,dx=\int_0^n e^{-x}-f'(x)\,dx=\left[-e^{-x}-f(x)\right]_0^n=2-\left(2+n\right).e^{-n}$$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}V_n=\lim\limits_{n\to+\infty}2-\left(2+n\right)e^{-n}=\lim\limits_{n\to+\infty}2-\dfrac{2}{e^n}-\dfrac{n}{e^n}=2-0-0=2$

Exercice N°4: (6 pts)

1/a)

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in [1,e]$: $(\ln(x))^n - (\ln(x))^{n+1} = (\ln(x))^n.(1-\ln(x)) \geq 0$

car $\forall x \in [1,e]$ on a : $0 \leq \ln(x) \leq 1$

b)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $I_n - I_{n+1} = \int_1^e (\ln x)^n \, dx - \int_1^e (\ln x)^{n+1} \, dx = \int_1^e (\ln x)^n - (\ln(x))^{n+1} \, dx \geq 0$

d'où $I_n \geq I_{n+1}$ donc la suite (I_n) est décroissante

c) $\forall x \in [1,e]$ on a : $0 \leq \ln(x) \leq 1$ donc $I_n = \int_1^e (\ln x)^n \, dx \geq 0$

On a alors la suite (I_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge

2/a) $I_1 = \int_1^e \ln(x) \, dx = [x\ln(x) - x]_1^e = (e\ln(e) - e) - (1\ln(1) - 1) = 1$

b) $I_{n+1} = \int_1^e (\ln x)^{n+1} \, dx$

On pose $u(x) = (\ln(x))^{n+1}$ donc $u'(x) = (n+1)\frac{1}{x}(\ln(x))^n$

$v'(x) = 1$ donc $v(x) = x$

$$I_{n+1} = \left[x(\ln(x))^{n+1}\right]_1^e - \int_1^e x(n+1)\frac{1}{x}(\ln(x))^n \, dx = e - 0 - (n+1)\int_1^e (\ln(x))^n \, dx = e - (n+1)I_n$$

c) $I_2 = e - (1+1)I_1 = e - 2$

3/a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $I_n \geq 0$ donc $I_{n+1} \geq 0$ donc $e - (n+1)I_n \geq 0$ d'où $(n+1)I_n \leq e$

b)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $I_n \geq 0$ et $(n+1)I_n \leq e$ donc $0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e}{n+1} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$